DIÁLOGOS MATEMÁTICOS

ALFRÉD RÉNYI

SOUTIÑO EDITORA

DIÁLOGOS MATEMÁTICOS

ALFRÉD RÉNYI
Instituto de Matemáticas
Academia Húngara de Ciencias

TRADUCIDO POR
JORGE LOSADA RODRÍGUEZ
RAÚL PINO VELASCO

Universidad de León
Universidad de Extremadura

Título orixinal: *Dialógusok a matematikáról*

Primeira edición en Soutiño Editora: novembro de 2021

https://j-losada.github.io/divulgacion/

ISBN: 978-84-09-35555-6
Depósito Legal: C 1917-2021

…un matemático é unha máquina
que transforma café en teoremas.

Alfréd Rényi

A miña filla, Zsuszi

Contidos

1. *Diálogo socrático sobre matemáticas*

Sócrates: Buscas a alguén, querido Hipócrates?

Hipócrates: Non, Sócrates, pois veño de atopar a quen buscaba: es ti. Estiven tras túa por todos lados. Na ágora dixéronme que te viran paseando por aquí, a carón do río, e foi entón que vin onda ti.

Sócrates: Ben, cóntame entón por que viñeches, que despois quero preguntarche algo sobre a nosa discusión con Protágoras do outro día. Lembras non?

Hipócrates: Oféndeme a dúbida! Desde aquel día non pasa unha noite sen que pense naquilo. Veño pedir consello, pois aquela conversa mantense no meu pensamento.

Sócrates: Parece, querido Hipócrates, que quixeres falar comigo sobre a mesma cuestión que eu desexo discutir contigo e daquela, ambas cuestións son unha e coinciden. Os matemáticos andan logo trabucados cando din que dous nunca é igual a un.

Hipócrates: Efectivamente, Sócrates, pois é xustamente de matemáticas do que quero falar.

Sócrates: Hipócrates, ben sabes que eu non son matemático. Por que non lle formulas as túas dúbidas ao afamado Teodoro?

Hipócrates: Incrible, Sócrates, respondes ás miñas dúbidas incluso antes de que as formule. Vin pedir a túa opinión sobre o meu desexo de facerme discípulo de Teodoro.

Da última vez que vin onda ti, daquela coa intención de facerme discípulo de Protágoras, fomos logo falar con el e foi dirixindo ti a conversa que me quedou ben claro que ese home non coñecía a disciplina da que falaba. Mudei así de opinión e non me fixen discípulo del. Aquela conversa axudoume a saber que non debo facer, pero non me mostrou ren sobre o que debo facer. Sigo interroganádome sobre isto último.

Fun a banquetes e estiven á parola cos mozos da miña idade, atrévome a dicir que me divertín moito, mais non é iso o que me satisfai. Amólame decatarme ignorante. Máis exactamente, sinto que o coñecemento do que dispoño é incerto. Durante a discusión con Protágoras, decateime de que o meu coñecemento sobre a virtude, a xustiza ou a coraxe está ben lonxe de ser aceptable. Non obstante, penso que isto é un gran avance: vexo claramente a miña propia ignorancia.

SÓCRATES: Alédame, querido Hipócrates, que me entendas tan ben. Eu sempre me repito con sinceridade que nada sei e nada coñezo. *A diferenza da maioría das persoas, eu non imaxino que coñezo ou sei o que en realidade nin coñezo nin sei*.

HIPÓCRATES: Iso mostra claramente a túa sabedoría, Sócrates. Pero ese coñecemento non é suficiente para min. Eu sinto un forte desexo por obter algún coñecemento certo e sólido, penso que non serei feliz ata logralo. Reflexiono constantemente sobre que tipo de coñecemento debo intentar adquirir.

Recentemente, Teeteto díxome que só hai certeza nas matemáticas e suxeriume aprender matemáticas do seu mestre: Teodoro. Seica é o maior experto en números e xeometría de Atenas. Por iso dime, Sócrates, atoparei o tipo de coñecemento que busco se estudo matemáticas con Teodoro?

SÓCRATES: Se queres estudar matemáticas, fillo de Apodoloro, entón, certamente, nada mellor podes facer que ir onda o meu bo amigo Teodoro. Pero debes decidir por ti mesmo se realmente queres estudar matemáticas ou non. Ninguén mellor ca ti coñece o que verdadeiramente precisas.

HIPÓCRATES: Por que rexeitas axudarme, Sócrates? Ofendinte sen sabelo?

SÓCRATES: Non me malinterpretes, meu xove amigo. Non estou anoxado; pero preguntas polo imposible. Cada un ten que decidir por si mesmo o que quere facer. Non podo facer máis que asistir como parteira ao nacemento da túa decisión.

HIPÓCRATES: Por favor, querido Sócrates, non te negues a axudarme. Se non estás ocupado, comecemos de inmediato.

SÓCRATES: Moi ben, que así sexa. Botémonos á sombra daquel carballo. *Pero primeiro dime, estás preparado para levar a conversa do xeito que a min me gusta? Eu farei preguntas e ti responderás. Con este método verás máis claro o que xa sabes e coñeces, pois fará agromar as sementes do coñecemento que xa están na túa alma*.

Agardo que non te comportes coma o rei Darío, quen matou ao capataz das súas minas por non sacar máis que cobre dunha mina na que o rei imaxinara ouro. Conto logo con que non esquezas que un mineiro só pode sacar dunha mina o que alí hai.

HIPÓCRATES: Xuro que non che recriminarei na, pero por Zeus! comecemos a minar dunha vez!

SÓCRATES: Todo ben daquela. Dime logo, sabes que son as matemáticas? Xa que queres estudalas, supoño que poderás dicirmo.

HIPÓCRATES: Podería responderche un cativo. As matemáticas son unha ciencia, unha das máis finas.

SÓCRATES: Non che pedín que louvaras as matemáticas, senón que describises a súa natureza. Por exemplo, se che preguntase pola arte dos médicos, responderías que trata sobre a saúde e a enfermidade e que ten como obxectivo curar aos doentes e manter aos sans. Estou no certo, non?

HIPÓCRATES: Efectivamente.

SÓCRATES: Responde entón a isto: a arte dos médicos estuda algo que existe? Quero dicir, se non houbese médicos, existiría igualmente a enfermidade?

HIPÓCRATES: Certamente, aínda máis do que agora!

SÓCRATES: Falemos doutra arte; por exemplo, da astronomía. Concordas comigo en que os astrónomos estudan o movemento das estrelas?

HIPÓCRATES: Si, estou seguro.

SÓCRATES: E se che pregunto se a astronomía estudo algo que existe, cal será a túa resposta?

HIPÓCRATES: A miña resposta será que así é.

SÓCRATES: Existirían as estrelas se non houbese astrónomos neste mundo?

HIPÓCRATES: Por suposto! E se Zeus na súa ira extinguise a toda a humanidade, as estrelas lucirían no ceo pola noite. Pero… por que falamos de astronomía e non de matemáticas?

SÓCRATES: Non te impacientes, meu bo amigo. Consideremos novamente outra arte e compararémola coas matemáticas. Como lle chamarías a un home que coñece a todas as criaturas que viven na fraga e nas profundidades mariñas?

HIPÓCRATES: Diría que é un científico que estuda a natureza viva.

SÓCRATES: E concordas comigo en que tal home estuda cousas que existen?

HIPÓCRATES: Concordo.

SÓCRATES: E se afirmo que toda arte estuda algo que existe, estarás de acordo?

HIPÓCRATES: Completamente de acordo.

SÓCRATES: Agora dime, meu xoven amigo, cal é o obxecto de estudo das matemáticas? que é o que estudan os matemáticos?

HIPÓCRATES: Fíxenlle esa mesma pregunta a Teeteto. Respondeume que un matemático estuda números e formas xeométricas.

SÓCRATES: Ben, a resposta é correcta. E ti dirías que existen esas cousas?

HIPÓCRATES: Abofé que si! Como poderiamos falar delas se non existisen?

SÓCRATES: Daquela, se non houbese matemáticos, habería números primos? e de ser así, onde estarían?

HIPÓCRATES: Agora xa non sei que responder. Se os matemáticos pensan nos números primos, entón é evidente que estes existen na súa conciencia; mais se non houbese matemáticos… os números primos non estarían en ningures.

SÓCRATES: Insinúas que os matemáticos estudan cousas inexistentes?

HIPÓCRATES: Si, penso que debemos admitilo.

SÓCRATES: Olla a cuestión desde outra perspectiva. Escribín aquí, nesta placa de cera, o número 37. Velo ben?

HIPÓCRATES: Si, vexoo.

SÓCRATES: E podes tocalo coa túa man?

HIPÓCRATES: Certamente que si.

SÓCRATES: Entón, se cadra, si que existen os números, non?

HIPÓCRATES: Oh, Sócrates, riste de min. Mira aí, debuxei na mesma placa un dragón con sete cabezas. Existe ese dragón? Nunca coñecín a ninguén que vira un dragón e estou convencido de que agás nos contos de fadas, os dragóns non existen. Entendo que estou enganado, supoño que nalgún lugar máis aló das Columnas de Hércules existen os dragóns, aínda que non teñen nada que ver co que eu debuxei.

SÓCRATES: Contas verdades, Hipócrates, e eu estou completamente de acordo co que ti ben dis. Mais, signfica iso que aínda podendo falar deles e debuxalos, en realidade, os números non existen?

HIPÓCRATES: Certamente.

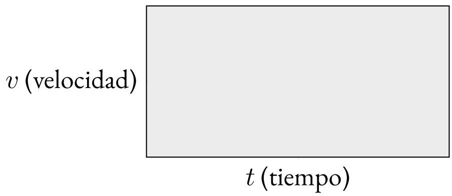
SÓCRATES: Non obteñas conclusións precipitadas. Fagamos outra proba. Levo razón se afirmo que podemos contar as ovellas que hai nese prado ou os barcos do porto do Pireo?

HIPÓCRATES: Si, podemos contalos.

GALILEI: Moi doado: a distancia percorrida ata o instante t é igual á área do triángulo $P_0 P_t Q_t$.

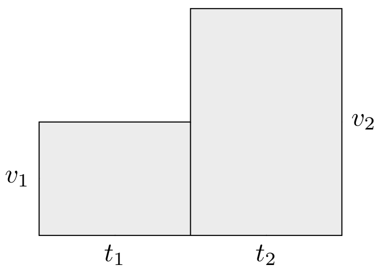
SRA. NICCOLINI: Explíqueme os detalles, por favor. Non entendo isto último que acaba de dicir.

GALILEI: Se a velocidade é constante, a distancia percorrida é igual ao produto do tempo pola velocidade. Se un segmento horizontal representa ao tempo e un segmento vertical representa á velocidade, a distancia percorrida é igual á área do rectángulo que ten por lados os segmentos mencionados.



Movemento con velocidade constante
$s = v \cdot t$ (distancia)

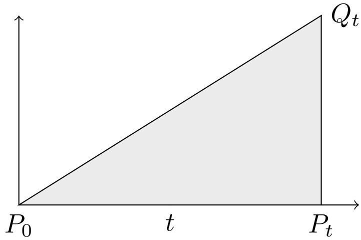
Se a velocidade muda, a situación xa é algo máis complicada, pero a distancia seguirá sendo unha área. Por exemplo, se a velocidade é constante durante algún tempo e cambia de súpeto a un valor máis alto permanecendo logo estable nese valor, entón a distancia percorrida será igual á área da rexión formada por dous rectángulos.



Movemento con velocidade constante a cachos
$s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2$

Se a velocidade cambia máis a miúdo, pero permanece constante entre dous cambios bruscos consecutivos, entón a distancia percorrida será igual á área dunha rexión formada por varios rectángulos.

Se a velocidade muda continuamente cun ritmo uniforme, a distancia percorrida será igual á área dun triángulo. Para entender isto, só tes que ver ao triángulo coma se estivese formado por unha infinidade de rectángulos paralelos de diferentes alturas.



Movemento con velocidade variando uniformemente

$$s = \frac{1}{2}a \cdot t \cdot t = \frac{1}{2}a \cdot t^2$$

SRA. NICCOLINI: Isto é realmente fabuloso! Falará sobre esta cuestión no seu libro sobre as leis matemáticas do movemento?

GALILEI: Si, por suposto! E de moitas outras similares a esa tamén. Do mesmo modo que podemos predicir onde estará unha pedra en caída libre despois de 2 ou 3 segundos, tamén se pode demostrar que se lanzo unha pedra, esta voará seguindo unha traxectoria parabólica. Isto é moi interesante, e non só en situacións prácticas, senón tamén desde un punto de vista teórico, pois permíteme entender que é o que sucede cando se combinan movementos de distinto tipo.

O que non acabo de entender é por que cando Ptolomeo tratou de calcular as órbitas aparentes do Sol, a Lúa e os planetas —que observamos día a día e ano a ano—, ninguén, agás quizais Arquímedes, examinou coidadosamente que é o que ocorre cando deixamos caer unha pedra ou cando a lanzamos ao lonxe. E aínda que se me acuse novamente de herexía, afirmo que *o movemento segue as mesmas leis aquí na Terra ca no firmamento*.

SRA. NICCOLINI: Entón o cosmos vén sendo coma un gran reloxo no que podemos calcular con exactitude como xiran as súas rodas e resortes, desde o máis pequeno ata o máis grande.

GALILEI: Estas marabillosas regras só forman un dos moitos capítulos do "libro da natureza"! Pois na natureza, tamén abundan os fenómenos irregulares, azarosos e imprevisibles.

SRA. NICCOLINI: A que se refire?

GALILEI: Pensa nas estrelas que, esporádicamente —coma, por exemplo, fai agora 60 anos—, aparecen de súpeto no firmamento. Durante uns cantos, o seu resplandor aumenta sen pausa, pero logo desaparecen tan rápido como viñeron.

Pensa tamén nas manchas que vemos xirar pegadas á superficie do Sol. A veces medran, a veces minguan, logo aparecen novas manchas, arremuíñanse e esfúmanse. O universo non se asemella en todos os aspectos a un reloxo, en absoluto! Nalgúns casos actúa máis ben coma un pícaro antolladizo e anoxado.

SRA. NICCOLINI: Entón, polo que me di, deduzo que no libro da natureza haberá capítulos que non están escritos na linguaxe das matemáticas, porque tratarán deses sucesos imprevisibles.

GALILEI: Equivócaste, Catalina; pero é comprensible que penses así, pois a descrición matemática do azar aínda está en cueiros. Malia todo, e tal é como eu mesmo demostrei cun sinxelo exemplo, a descrición matemática do azar é posible.

SRA. NICCOLINI: Cal é ese exemplo? Por favor, fáleme del.

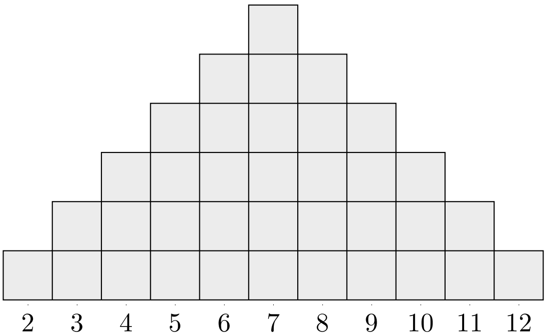
GALILEI: É o xogo dos dados, ese xogo de azar tan antigo coma popular. Se lanzamos un dado, como caia depende unicamente do azar e se as caras están numeradas do 1 ao 6, entón só podemos asegurar que sairá algún deses números. Sen embargo, se tiramos o dado moitas veces, observaremos certa regularidade: cada cara sae aproximadamente o mesmo número de veces. Pero é máis interesante que lancemos dous dados ao mesmo tempo e sumemos os números que saen. Con que valores debemos contar?

SRA. NICCOLINI: Moi doado: con calquera entre o 2 e o 12.

GALILEI: Xa, pero agora esas 11 posibilidades non ocorren todas coa mesma frecuencia. O 7 sairá máis a miúdo, aproximadamente nun 1/6 das tiradas; logo veñen o 6 e o 8, que sairán —cada un deles— en aproximadamente un 5/36 do total de lanzamentos; o 5 e o 9 só sairán aproximadamente un 1/9 das veces; o 4 e o 10 un 1/12; o 3 e o 11 un 1/18 e finalmente, o 2 e o 12 só sairán aproximadamente nun 1/36 do total de tiradas.

SRA. NICCOLINI: Vaia misterio. Cal é o motivo?

GALILEI: A razón é moi simple.



$$
\begin{aligned}
2 &= 1+1 \\
3 &= 1+2 = 2+1 \\
4 &= 1+3 = 2+2 = 3+1 \\
5 &= 1+4 = 2+3 = 3+2 = 4+1 \\
6 &= 1+5 = 2+4 = 3+3 = 4+2 = 5+1 \\
7 &= 1+6 = 2+5 = 3+4 = 4+3 = 5+2 = 6+1 \\
8 &= = 2+6 = 3+5 = 4+4 = 5+3 = 6+2 \\
9 &= = 3+6 = 4+5 = 5+4 = 6+3 \\
10 &= = 4+6 = 5+5 = 6+4 \\
11 &= = 5+6 = 6+5 \\
12 &= = 6+6
\end{aligned}
$$

Podemos obter o 4 *de tres formas distintas: como suma dun* 3 *e dun* 1 *—xa sexa co primeiro dado amosando o* 3 *e co segundo o* 1 *ou viceversa— e tamén como suma dun* 2 *con outro* 2*. Sen embargo, para que saia o* 12*, só hai unha opción: ten que saír un* 6 *en ambos dados. Polo tanto, entre as sumas posibles, o* 4 *aparecerá aproximadamente* 3 *veces máis frecuentemente co* 12.

Sra. Niccolini: Vaites! Vou probar logo esa lei das matemáticas do azar no xogo dos dados, cre que gañarei moitos cartos?

Galilei: Un xogo de azar é xusto se se fixan regras de maneira que ningún xogador parta dunha posición de vantaxe.

Se as regras estivesen mal configuradas, un xogador podería facerse rico se dispón de diñeiro suficiente como para xogar ata que prevalezan as leis do azar.

Sra. Niccolini: Nunca pensei que a matemática se agochase detrás dos xogos de azar. Como se chama esta rama das matemáticas?

Galilei: É unha rama tan novidosa que aínda non ten nome. Poderiamos chamarlle "cálculo de probabilidades".

Sra. Niccolini: E como é que nunca escoitara falar dela?

Galilei: Ata non fai moito, os matemáticos —acostumados a estudar unicamente aquilo que é exacto e regular— fuxían do azar porque entendían que non lles concernía. A autoridade de Aristóteles tamén actuou nesa dirección; pois segundo a súa doutrina, as matemáticas estudan o inmutable e… que hai máis cambiante co azar? Ademais, tamén houbo outros prexuízos aínda máis antigos: é unha vella costume ver a vontade de Deus nos fenómenos fortuitos e azarosos coma o lanzamento de dados, o voo das aves ou a forma irregular do fígado dun animal sacrificado.

Todo isto causou certo estremecemento e conmoción fronte aos sucesos aleatorios; e daquela, intentar explicar co pensamento humano este tipo de eventos —tan divinos— estivo considerado como algo próximo á blasfemia. Sen embargo, eu son dos que pensan que se Deus nos deu cerebro é para que o empreguemos.

SRA. NICCOLINI: Fascíname o xeito co que as matemáticas —aínda que eu só sei delas o que vostede me conta— simplifican as cousas máis complexas. Á luz do seu facho, moitas cuestións que eran difíciles e incomprensibles fanse cristalinas e simples.

GALILEI: Si, o que dis é certo. Pero debo dicirche que as matemáticas, en ocasións, tamén nos ensinan que as cousas aparentemente máis simples son, en realidade, moi complexas.

SRA. NICCOLINI: Que pretende dicirme, señor Galilei?

GALILEI: Dareiche un exemplo ben sinxelo. Anotemos nesta folla os números enteiros do cero en diante; si, do seguinte modo:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots$$

Imaxinemos que esta sucesión de números continúa ata infinito.

Agora, entre todos estes, sinalemos aqueles que son o cadrado dalgún número.

Ben ves, a medida que avanzamos atopamos cada vez menos números que marcar, pois a distancia entre dous cadrados consecutivos faise cada máis grande.

SRA. NICCOLINI: Efectivamente, as distancias son

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9, \ldots$$

Vaia, os números impares.

GALILEI: Si, como as distancias da pedra en caída libre. Pero respóndeme á seguinte cuestión: se afirmo que hai menos números cadrados ca números enteiros, estou no certo?

SRA. NICCOLINI: Pois paréceme que si.

GALILEI: Fagamos o seguinte: escribe de novo a sucesión dos números enteiros e anota embaixo de cada número o seu cadrado.

Na segunda liña só haberá cadrados. E fíxate, cada un deles só aparece unha vez, non si?

SRA. NICCOLINI: Si, si.

GALILEI: Debaixo de cada número hai outro e polo tanto, na segunda liña hai tantos números coma na primeira. Aínda dis que hai menos números cadrados ca números enteiros?

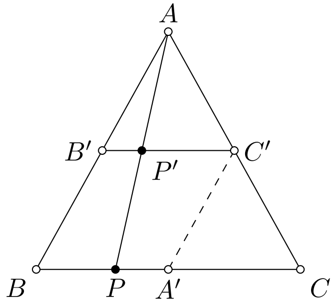
$$0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 19\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \dots$$
$$0\ \ 1\ \ 4\ \ 9\ \ 16\ \ 25\ \ 36\ \ 49\ \ 64\ \ 81\ \dots$$

SRA. NICCOLINI: Confúndeme este exemplo. Que deducimos?

GALILEI: *Que o que é certo no caso finito —por exemplo, que as partes sempre son menores co todo— non é necesariamente certo no caso infinito*. Isto xa o sabía Zenón; lembras o seu paradoxo sobre o estadio?

Zenón deuse conta de que se nun triángulo ABC conectas os puntos medios C' e B' dos lados AC e AB e prolongas a liña que une un punto P' dese segmento co vértice A cara ao lado BC, entón a cada punto do segmento $B'C'$ correspóndelle un único punto do lado BC e viceversa e daquela, o segmento $B'C'$ —cuxa lonxitude é a metade da lonxitude do segmento BC— ten tantos puntos coma o segmento BC.

É curioso, pero Zenón non se decatou de que ocorre exactamente o mesmo cos números enteiros.



SRA. NICCOLINI: Entón, do mesmo modo, tamén podes demostrar que —en realidade— hai tantos números pares coma números enteiros e, sen embargo, só é par un de cada dous números enteiros.

GALILEI: Vexo que entendiches perfectamente todo o que dixen.

Podemos afirmar que alguén asimilou certa idea ou concepto cando é quen de transformala por si mesmo; ou noutras palabras: cando é quen de concibilo novamente.

SRA. NICCOLINI: Iso é certo. Quen só sabe cociñar seguindo receitas non é un bo cociñeiro. Un bo chef modifica as receitas ao seu libre albedrío e bota máis ou menos especias segundo conveña, elaborando así un prato distinto de cada vez.

GALILEI: Un bo cociñeiro fai experimentos, igual ca un científico e pode facelos libremente e sen sospeitas de herexía.

SRA. NICCOLINI: Señor Galilei, mentres me contaba estas cousas tan interesantes fíxose noite, penso que para vostede xa é hora de ir á cama. Sinto moito telo entretido durante tanto tempo. Xa ha estar canso de explicarme tantas cousas.

GALILEI: Oh, para nada, gocei moito desta conversa! E ata esquecín por completo a miña penosa situación.

SRA. NICCOLINI: De verdade? Non debería matinar tanto niso.

GALILEI: Sempre que me preguntas sobre cuestións de matemáticas, falo por manterme entretido e para que non pense nos meus problemas?

SRA. NICCOLINI: Non. Espero que non se anoxe comigo. Créame, aínda que tamén teña outras razóns, a verdade é que estou moi interesada neses problemas.

Vexo, señor Galilei, que vostede pode ler non só no libro da natureza, senón tamén no pensamento humano. Non entendo logo por que non emprega esa habilidade contra os seus inimigos; defenderíase moito mellor e evitaría enervalos.

GALILEI: Ler no teu pensamento anxelical é para min un pracer tan puro como o de investigar as marabillas da natureza. Mais non me agrada ler na alma dos meus inimigos; só os porcos lle gusta remexer na lama.

SRA. NICCOLINI: Se ignorase por un intre ese odio e intentase ler no pensamento dos seus inimigos, conxecturo que mudaría de opinión sobre o plan de Torricelli e os seus entusiastas amigos.

GALILEI: Ti tamén me recomendas fuxir? De veras cres que debería aceptar a súa oferta?

SRA. NICCOLINI: A única razón pola que non respondo cun simple "si" é que descoñezo como de realistas son eses plans e se realmente serían exitosos. No seu lugar, señor Galileo, eu trataría de fugarme. Se o plan é realizable —e conste que eu non estou convencida diso—, penso que debería aceptar. Non quería entremeterme, pero xa que mo preguntou, pois opino.

GALILEI: Ti tampouco cres que gañarei esta batalla?

SRA. NICCOLINI: Vostede dixo que só confía na verdade. E eu estou de acordo en que tarde ou cedo prevalecerá a verdade, pero o que xa non sei e se estaremos vivos para cando iso suceda.

Tamén dixo que os cargos son infundados e que non lograrán probar nada. Paréceme que aí comete un erro: non se confunda, a Inquisición non xulga a verdade como fai vostede na ciencia; nada diso!

Pero deixemos ese tema. Pode que eu sexa demasiado pesimista. É hora de deitarse e descansar. Ogallá que durma tan ben como fixo a pasada noite.

GALILEI: Onte pola noite soñei que habitación comezaba de súpeto a voar cada vez máis e máis alto, máis aló das nubes, xa no espazo baleiro.

Non podes imaxinar a sensación que foi para min ver a Terra —que cada vez era máis pequena— brillando no ceo escuro coma se fose a Lúa. Vina en movemento; xiraba maxestuosamente arredor do Sol á vez que rotaba sobre o seu propio eixe. Nunca antes estivera tan feliz. Vía cos meus propios ollos o movemento da Terra!

Saquei entón o meu telescopio e así como antes sempre mirara desde a Terra cara o ceo, mirei agora do ceo á Terra e apuntei a Roma. Era un telescopio excelente, moitísimo mellor ca calquera dos que construín; ata me permitía recoñecer as facianas dos romanos. E vin a Inchofer e Pasqualigo —eses dous burriños de alma escura— camiñando polas marxes do Tíber mentres discutían.

Xirei un parafuso e escoiteinos. Falaban do movemento da Terra;

cada un máis alto e enervado co outro. Dicían que se trataba dunha doutrina falsa e herética; pero mentres tanto, a Terra nin se inmutaba e proseguía co seu maxestuoso movemento arredor do Sol e ignorando as súas babecadas, xiraba tamén sobre o seu eixo arrastrando consigo a estes dous papóns que desapareceron da miña vista calumniándome e denigrando a Copérnico.

Pareceume tan grotesco que escachei a rir; brotáronme bágoas nos ollos de tanta gargallada e foi entón que espertei.

Sra. Niccolini: Foi un soño ben fermoso. Se cadra esta noite, soña cunha época na que ata os cativos aprenden na escola que a Terra xira arredor do Sol.

Galilei: Fantaseo con esa idade a miúdo cando estou esperto e estou convencido de que ese momento chegará pronto.

O progreso da ciencia é imparable, pero non é constante nin está exento de obstáculos. Dado que a ciencia é unha creación humana, as ideas novidosas tamén terán que loitar no futuro, pero máis tarde ou máis cedo, a verdade irromperá de novo iluminando moitas das cuestións que hoxe nos desconcertan.

Sen embargo, preocúpame que fará a humanidade do futuro con eses coñecementos. Será a xente máis feliz nesa época? Non terán tamén eses tempos os seus propios prexuízos e dogmas? Existirán daquela os envexosos sen talento que calumnian aos honestos? Non haberá tamén nesa época vermes parasitarios na frondosa árbore da ciencia?

Sra. Niccolini: Cando pensamos no futuro, debemos desexar con firmeza que a humanidade non só avance en coñecementos, senón tamén en misericordia.

Estou segura de que nas vindeiras xeracións haberá vermes, mais tamén persoas que se guiarán exclusivamente pola verdade; e cando volvan a vista atrás, verán que Galileo Galilei superaba aos seus coetáneos por máis de dúas cabezas, e declararanse logo orgullosos discípulos da súa obra e dos seus soños.

Epílogo

Un autor optimista non escribe un prólogo para a súa propia obra, pois confía en que esta fale por si mesma e pensa que os seus lectores entenderán o que quixo dicir sen necesidade de ningunha explicación adicional. Aínda que eu son optimista, no caso deste libro sentín que era necesario engadir algún comentario sobre os obxectivos e as consideracións que me levaron a escoller o diálogo como estilo literario. Engado estas explicacións nun epílogo, pois quero que sexan lidas despois dos diálogos, nunca antes.

O interese polas matemáticas e as súas aplicacións vai hoxe en aumento en moitos países e entre un número crecente de persoas. En máis dunha ocasión solicitouseme que impartira unha charla divulgativa; foi entón cando observei que a maioría da xente está interesada —ante todo— en tres cuestións: saber que son realmente as matemáticas, entender e coñecer cal é a súa relación coas humanidades e coas outras ciencias e finalmente, saber que poderían ofrecerlle as matemáticas a quen traballe noutra disciplina. Tamén descubrín que o público que acode a este tipo de conferencias —cuxa ampla maioría goza dunha formación que lles permitiría ler e entender libros de matemáticas dirixidos a un público non especialista— non desexa, en xeneral, máis ca unha simple ampliación da súa visión sobre as matemáticas; adquirir ou coñecer os métodos específicos desta ciencia pouco ou nada lles interesa. É máis, aqueles que precisan de certos coñecementos matemáticos para o seu traballo, antes de decidir se estudar a fondo determinada área das matemáticas, esixen saber que poden esperar dela. Hai que recoñecer que o estudo desta ciencia non é doado para quen non o ten por costume.

Falando de matemáticas con non matemáticos, atopeime con numerosos prexuízos, malentendidos e equívocos; e non foi só entre persoas cuxos intereses e actividades cotiás son alleas ás matemáticas, senón tamén entre aqueles que por mor da súa profesión, teñen certo coñecemento sobre algunha rama desta disciplina. En realidade isto non é tan sorprendente, pois as persoas que gozan dalgún coñecemento pero carecen dunha visión suficientemente ampla e profunda adoitan estar máis dispostas a xeneralizar de forma falaz. Descubrín tamén que os fundamentos tanto das matemáticas como das súas aplicacións están a miúdo —mesmo entre os propios matemáticos— en constante disputa e suxeitos a certa controversia.

Estas circunstancias convencéronme da necesidade real dunha discusión sobre certas cuestións básicas de matemáticas e as súas aplicacións empregando un estilo que aínda sendo accesible para os non especialistas, presente os problemas na súa plena complexidade. Decateime axiña de que facer entendibles estas cuestións para o gran público non sería unha tarefa doada. Polo tanto, comecei por buscar un método especial que me permitira achegar os problemas abstractos aos profanos; e tal procura levoume a experimentar cos diálogos socráticos, pois alí os pensamentos móstranse a medida que se van creando mentres esaxera e dramatiza ideas, mantendo así esperta a atención do público e facilitando daquela a comprensión dos contidos.

Escollín como tema central para o primeiro diálogo falar sobre "*Que son realmente as matemáticas?*" Penso que a discusión desta pregunta é de fundamental, pois a ensinanza das matemáticas nas escolas de educación primaria e secundaria está —aínda hoxe— moi lonxe de dar cunha resposta clara, correcta e actualizada.

Nese primeiro diálogo intentei calcar o mellor que souben o método —e mesmo a linguaxe e a fala— dos diálogos socráticos orixinais. O protagonista é o propio Sócrates e a discusión ten lugar na época que viu nacer ás matemáticas no sentido en que hoxe as entendemos; así pois, as matemáticas preséntanse ao lector "in statu nascendi". No diálogo, Sócrates aplica o seu método tan característico: formulando preguntas conduce ao interlocutor á comprensión daquilo que os ocupa. Un diálogo socrático non é logo un choque entre dous puntos de vista; é máis ben unha conversa na que os participantes, xuntos, intentan descubrir a verdade. Mediante unha análise lóxica dos conceptos implicados, chegan —paso a paso— a respostas para cada unha das cuestións formuladas. Durante a discusión, os participantes adoitan facer declaracións —en ocasións mesmo de forma categórica— que logo entenden como falsas. Así, un diálogo socrático é un todo orgánico e só se entende seu verdadeiro significado lendoo de principio a fin e se é posible, sen interrupcións. Todas estas características fan que o diálogo socrático sexa realista, intenso e animado, polo que me pareceu especialmente axeitado para os meus obxectivos iniciais.

E aínda tiña outra razón para escoller este estilo: creo firmemente que o método socrático está directamente relacionado co método matemático. Esta crenza viuse fortalecida polas investigacións de Árpád Szabó, quen recentemente arroxou nova luz sobre as orixes das matemáticas na Antiga Grecia.

O primeiro diálogo foi representado por primeira vez en 1961 en Budapest; un ano máis tarde aparecería a primeira versión escrita na revista *Valósag*[1]. En 1963 apareceu unha tradución ao francés en *Les Cahiers Rationalistes*[2]. Ese mesmo ano representeino por primeira vez en inglés; foi despois da cea do congreso de físicos estadounidenses en Edmonton. Publicouse a versión escrita correspondente tanto no *Canadian Mathematical Bulletin*[3] coma en *Physics Today*[4], que sería logo reimpresa pola revista *Simon Stevin*[5]. Desde entón, apareceron traducións en alemán[6] e portugués[7].

A boa recepción tanto entre matemáticos coma profanos do primeiro diálogo animoume a seguir experimentando con este xénero. Un segundo diálogo foi presentado por primeira vez na Universidade de Toronto, corría o ano 1964; a versión escrita en inglés foi publicada inicialmente pola *Ontario Mathematics Gazette* [8] e tamén apareceu máis tarde en *Simon Stevin* [9].

[1] Dialógus a matematikáról, *Valóság*, **3**, 1–19, 1962.

[2] Un dialogue, *Les Cahiers Rationalistes*, **33**, No. 208-209. Janvier-Frévier, 1963.

[3] A Socratic dialogue on mathematics, *Canadian Mathematical Bulletin*, **7**, 441–462, 1964.

[4] A Socratic dialogue on mathematics, *Physiscs Today*, December, 1964, pp. 1–36.

[5] A Socratic dialogue on mathematics, *Simon Stevin*, **38**, 125–144, 1964–1965.

[6] Skratischer Dialog, *Neue Sammlung*, **6**, 284–304, 1966.

[7] A matemática–Um Dialogo Socrático, *Gazeta de Matemática*, **26**, N,. 100, Julho-Dezembro 1965, pp. 59-71.

[8] A dialogue on the applications of mathematics, *Ontario Mathematics Gazette*, **3**, No. 2, 28–40, 1964

[9] A dialogue on the applications of mathematics, *Simon Stevin*, **39**, No. 2, 3–17, 1965

Dado que no primeiro diálogo só discutira a relación das matemáticas coa realidade no sentido filosófico, no segundo quixen centrarme nas aplicacións das matemáticas. O lóxico era escoller a Arquímedes como protagonista, pois o seu nome está intimamente ligado —xa desde a antigo— coas aplicacións. Non obstante, o marco histórico do segundo diálogo non me permitiu dicir todo o que me gustaría sobre un tema tan polémico e interesante.

Así pois, sentín que tiña que escribir un terceiro diálogo cuxo protagonista sería Galileo: o primeiro pensador dos tempos modernos que se decatou da importancia do método matemático para descubrir as leis da natureza e que propagou logo con tanto ímpeto a súa convicción. O segundo e o terceiro diálogo compleméntanse entre si, pero tamén perfeccionan ao primeiro. Son, non obstante, moi distintos do primeiro, tanto na forma coma no estilo. Por suposto, Arquímedes e Galileo non empregan o método socrático: en vez de guiar ao interlocutor para que adiviñe os seus pensamentos, simplemente exprésanos. Tiven que prescindir entón da principal fonte de tensión interior que proporciona o diálogo socrático. Pero intentei compensar esta perda ambientando os diálogos en situacións históricas extremadamente críticas e decisivas, cuxas dinámicas internas estarían directamente relacionadas coa temática do diálogo, amplificando así a tensión subxacente.

A presenza de Arquímedes e Galileo permitíume tratar temas máis avanzados cos do primeiro diálogo; especialmente, todos aqueles que teñen Arquímedes ou Galileo como protagonistas. Intentei incorporar a maioría dos seus logros dunha doutra forma.

En relación con isto, gustaríame dicir algunhas palabras sobre o tratamento dos feitos históricos. Procurei evitar todo tipo de anacronismo nos tres diálogos e tiven coidado de non atribuír aos meus personaxes ningún coñecemento matemático (nin doutra disciplina) que non fose acorde ao momento histórico. Non obstante, dado que Arquímedes e Galileo foron verdadeiros pioneiros cuxas ideas e forma de pensar non só foron moi adiantadas ao seu tempo, senón que incluso aínda hoxe son modernas, non me gardei de incluír nestes diálogos todo aquilo que considerei oportuno. Por suposto, para evitar o anacronismo, restrinxinme a exemplos de matemáticas elementais. Podería falar logo do cálculo infinitesimal, pero só do que Arquímedes e Galileo coñecían. Esta limitación, con todo, tiña certas vantaxes, pois forzoume a evitar exemplos que serían demasiado complicados para os profanos.

Sen embargo, non interpretei o requisito da fe histórica de forma tan ríxida como para atribuír aos meus personaxes só aqueles puntos de vista e ideas que realmente posuían; sentinme libre para aporlle outros aos que quizais tamén puidesen ter chegado, especialmente cando se trataba de desenvolvementos lóxicos de ideas coas que si estaban ben familiarizados. Non obstante, naqueles casos nos que se sabe que mantiñan crenzas erróneas, vinme obrigado a non ocultalas. Por exemplo, é ben coñecido que Galileo cría que os planetas xiraban arredor do Sol describindo órbitas circulares e sábese que non entendeu o papel da gravitación, polo que Galileo fala sobre estas cuestións en consecuencia.

Doutra banda, pareceume admisible facer conxecturas tan atrevidas coma, por exemplo, que Arquímedes chegou a pensar na cibernética ao idear unha máquina para cribar números primos[10]. Evidentemente, non podo xustificar esta conxectura con ningún documento histórico e por suposto, tampouco a considero ben fundamentada; o único que afirmo é que non é impensable que sexa certo. Os feitos históricos ao noso alcance son tan insuficientes para desmentilo como para aceptalo. Pensei que a "licenza poética" permitía empregar hipóteses coma esta.

En canto aos antecedentes históricos do segundo e o terceiro diálogo, debo dicir que procurei manterme fiel aos feitos coñecidos nos puntos esenciais. A única excepción atópase no segundo diálogo: onde o rei Hierón dirixe a defensa de Siracusa no cerco do ano 212 a. C., cando en realidade morreu tres anos antes. Estes dous diálogos conteñen a descrición de sucesos certamente hipotéticos, pero que non contradín en absoluto ningún feito coñecido. Este é o caso, por exemplo, do plan de fuxida para Galileo: non sabemos se Torricelli e os seus amigos tiñan realmente tal propósito, mais non é en absoluto descartable.

O contido (aínda que non así a redacción) dalgunhas frases dos diálogos é ou ben directamente atribuíble aos personaxes, ou ben foi atribuído a eles por personaxes coetáneos. É o caso, por exemplo, de cando Sócrates fala sobre

[10] Un aparato con tal utilidade foi descrito por primeira vez por D. H. Lehmer (A photoelectric number sieve, *American Mathematical Monthly*, **40**, 401–406, 1933).

si mesmo[11], Arquímedes sobre o seu método[12] e Galileo sobre a linguaxe do libro da natureza[13]. Esas frases (e só esas) aprecen impresas en cursiva.

Intentei amosar a personalidade dos distintos personaxes de forma fiel ao coñecido. No caso do terceiro diálogo, a obra de teatro de László Németh influíume notablemente: tomei del —entre outras cousas— a idea de presentar a Torricelli e á señora Niccolini.

Para aqueles que queiran estudar os antecedentes históricos destes diálogos engadín unha bibliografía seleccionada cuxo obxectivo non é a completitude; tan só contén aquelas referencias que, entre o material que consultei, me pareceron máis útiles e interesantes.

Agardo que este epílogo aclare cales eran os meus obxectivos cando decidín escribir estes diálogos. Xulgar ata que grao logrei executar as miñas intencións é traballo do lector.

ALFRÉD RÉNYI

[11] Véxase, por exemplo, "Apología de Sócrates" (Platón, *Diálogos* (Gredos, 1981-1999), Volumen I).

[12] Véxase a carta de Arquímedes a Eratóstenes (Heath, T. L., *The works of Archimedes with the method of Archimedes* (Dover, 1960), p. 13). En particular, a seguinte frase: "certain things first became clear to me by a mechanical method, although they had to be demonstrated by geometry afterwards, because their investigation by the said method did not furnish an actual demonstration. But it is of courese easier when we have previously acquiered by the method, some knowledge of the question, to supply the proof than it is find it whitout any previous knowlwdge".

[13] Véxase a seguite frase da carta de Galileo titulada "The Assayer" (Drake, S., *Discoveries and opinions of Galileo* (Doubleday, 1957), pp. 237–238.): "Philosophy is written in this grand book, the universe, which stands continually open to our gaze. But the bok cannot be understood unless one first learns to comprehend the language and read the letters in which it is composed. It is written in the language of mathematics..."

Bibliografía seleccionada[14]

Primeiro diálogo

Platón, *Diálogos* (Gredos, 1981-1999).

Szabó, Á., The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms, *Scripta Mathematica*, **27**, 27–48, 1964.

Szabó, Á., The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms II, *Scripta Mathematica*, **27**, 113–139, 1964.

Segundo diálogo

Heath, T. L., *The works of Archimedes* (Dover, 1960).

Heath, T. L., *The works of Archimedes with the method of Archimedes* (Dover, 1960).

Heath, T. L., *Greek mathematics* (Dover, 1963).

Plutarco, *Vidas paralelas* (Gredos, 1985).

Clagett, M., *Greek science in antiquity* (Collier, 1955).

[14]Nota dos tradutores: as versións en húngaro e alemán inclúen tamén a seguinte referencia do filólogo e historiador da ciencia húngaro Á. Szabó:

Szabó, Á., Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik [O intento máis antigo de fundamentación axiomático de definición das matemáticas], *Osiris*, **14**, 308–369, 1962.

Terceiro diálogo

Galilei, G., *Diálogo sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano* (Alianza, 1995).

Drake, S., *Discoveries and opinions of Galileo* (Doubleday, 1957).

Galilei, G., *Diálogos acerca de dos nuevas ciencias* (Losada, 2003).

Geymonat, L., *Galileo Galilei* (Península, 1986).

Santillana, G., *The crime of Galileo* (The University of Chicago, 1976).

Armitage, A., *The world of Copernicus* (New American Library, 1947).

Magyar
Matemática

Alfréd Rényi received a literary, rather than scientific, schooling at a Gymnasium in Budapest. Throughout his life he had a love of literature and was fascinated by the works of the philosophers of ancient Greece. This, perhaps, was partly inherited from his mother and partly a result of his school education. He also began to take an interest in astronomy and this interest led him to take an interest in physics. To understand physics he had to master some difficult mathematics and it soon became clear to him that this was the right subject for him to study at university. Another factor in his move towards mathematics was his outstanding mathematics teacher at the Gymnasium, Rózsa Péter.

He graduated from the Gymnasium in 1939 as the best student in his year but, because of his Jewish parents, he was unable to study at Budapest University due to the racial laws imposed by the Hungarian state. However, he was still able to show his outstanding abilities by receiving an honorable mention in both a mathematics competition and in a Greek competition in the autumn of 1939.

Rényi was a famous raconteur remembered for many performances of his dialogue, which he addressed to his daughter, on the nature of mathematics. In this style he published Dialoge über Mathematik (1967) and Letters on probability (1969).

www.mathshistory.st-andrews.ac.uk

Ejemplar gratuito
ISBN 978-84-09-35555-6
9 788409 355556

SOUTIÑO
EDITORA